Universidad Simón Bolívar
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas
MA1116. Matemáticas III.

## Números Complejos. Operaciones fundamentales

**Definición.** La cantidad $\sqrt{-1}$ se llama *unidad imaginaria.* se representa con el símbolo $i$ y tiene la propiedad de que $i = -1$.

Para representar la raíz cuadrada de un número negativo distinto de $-1$ definimos la nueva clase de números definidos así:

**Definición.** Un número de la forma $bi$, donde $b$ es cualquier número real e $i$ es la unidad imaginaria, recibe el nombre de *número imaginario puro.*

**Definición.** Un número de la forma $a + ib$, donde $a$ y $b$ son números reales e $i$ es la unidad imaginaria, se llama *número complejo.*

Si $a = 0$ pero $b \neq 0$, el número complejo $a + bi$ toma la forma $a$, que es un número real.

**Definición.** Se dice que dos números complejos $a + bi$ y $c + di$ son *iguales* si y sólo si $a = c$ y $b = d$.

Como una consecuencia inmediata de esta definición, se tiene que $a + bi = 0$ solamente si $a = 0$ y $b = 0$.

Veamos una aplicación de esta definición.

**Ejemplo.** Hallar los valores reales de $x$ y $y$ que cumplen con la siguiente igualdad:

$$x^2 + 2y^2 + xi + yi = xy + 7 + 3i.$$

Solución. Primero ordenamos los términos de modo que cada miembro sea un número complejo en la forma $a + bi$. Así tenemos:

$$\left(x^2 + 2y^2\right) + (x + y)i = (xy + 7) + 3i.$$

Ahora, por la definición de igualdad de dos números complejos, igualando las partes reales e imaginarias entre sí, tenemos

$$\begin{aligned} x^2 + 2y^2 &= xy + 7, \\ x + y &= 3. \end{aligned}$$

Verificar que las soluciones del sistema son $x = 1$, $y = 2$ y $x = \frac{11}{4}$, $y = \frac{1}{4}$, que corresponden a los valores buscados.

**Definición.**El *negativo* del número complejo $a + bi$ es $-a - bi$. Por ejemplo, $-5i$ es el negativo de $5i$ y $4 - 3i$ es el negativo de $-4 + 3i$.

**Definición.** Dos números complejos que sólo difieren en el signo de sus partes imaginarias se llaman *números complejos conjugados.*

Así, $a + bi$ y $a - bi$ son números **complejos conjugados**.

## Operaciones Fundamentales

Las cuatro operaciones de adición, sustracción, multiplicación y división se llaman las *operaciones fundamentales.* Una excepción se ha observado ya, a saber, que $i^2 = -1$, que es una propiedad que no poseen los números reales. La otra excepción es la siguiente ley de los números reales:

Para $a > 0$ y $b > 0$, $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$.

Esta ley no es válida para los números imaginarios. Así tenemos, para $a > 0$ y $b > 0$, $\sqrt{-a} \cdot \sqrt{-b} \neq \sqrt{(-a)(-b)} = \sqrt{ab}$.

El resultado correcto se obtiene como sigue:

$$\sqrt{-a} \cdot \sqrt{-b} = (\sqrt{a}i)(\sqrt{b}i) = i^2\sqrt{ab} = -\sqrt{ab}.$$

Para evitar este error siempre escribiremos los números complejos en la forma $a + bi$, la cual se llama a veces la *forma canónica*, y haremos operaciones con $i$ como con cualquier otra literal, reemplazando al final las potencias de i como sigue: $i^2 = -1, i^3 = i^2.i = -i, i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1, i^5 = i^4.i = i$, etcétera.

Ahora vamos a dar las definiciones de las cuatro operaciones fundamentales para dos números complejos cualesquiera $a+bi$ y $c+di$, sobrentendiéndose que el resultado final también quedara expresado en la forma canónica de un número complejo.

(1)*Adición.* Para sumar dos (o más) números complejos, se suman separadamente las partes reales e imaginarias del mismo modo como se reducen los términos semejantes en la adición de expresiones algebraicas ordinarias. Así tenemos:

$$(a + bi) + (c + di) = a + c + bi + di$$

o sea

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i,$$

y esta última igualdad constituye la *definición para la suma de dos números complejos.*

(2)*Sustracción.* Para restar un número complejo de otro, se restan las partes reales e imaginarias separadamente. Así tenemos:

$$(a + bi) - (c + di) = a + \; - c + bi - di$$

o sea

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i,$$

y esta última igualdad constituye la *definición para la diferencia de dos números complejos.*

(3) *Multiplicación.* El producto de dos números complejos se obtiene multiplicándolos como binomios ordinarios y luego reemplazando $i^2$ por $-1$. Así tenemos:

$$(a + bi)(c + di) = ac + adi + bci + bdi^2$$

o sea

$$(a+bi)(c+di) = (ac-bd) + (ad+bc)i,$$

siendo esta igualdad la *definición del producto de dos números complejos.*

*División.* Para expresar el cociente de dos números complejos como un solo número complejo, utilizamos un proceso análogo a la racionalización de un denominador con radicales en una fracción. En este caso, utilizamos el conjugado del denominador en lugar del factor de racionalización. Así tenemos

$$\begin{aligned} \frac{a+bi}{c+di} &= \frac{a+bi}{c+di}\cdot\frac{c-di}{c-di} \\ &= \frac{ac-adi+bci-bdi^2}{c^2-d^2i^2} = \frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}, \end{aligned}$$

es decir

$$\frac{a+bi}{c+di} = \left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2}\right) + \left(\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right)i, \qquad c+di \neq 0,$$

esta última igualdad es la definición del cociente de dos números complejos.

Al efectuar las operaciones fundamentales con números complejos, se recomienda no utilizar las definiciones anteriores como fórmula. En lugar de esto, deben usar los métodos empleados en la obtención de estas de estas definiciones, como se muestra en los siguientes ejemplos.

**Ejemplo 1.** Efectuar la operación indicada en cada una de las siguientes expresiones y dar el resultado en forma canónica:

(a) $3 + 2\sqrt{-2} - 2(\sqrt{-3} - 1) + 2i - 4$.

(b) $(2+3i)(2-3i)(1+2i)$.

*Solución.* (a) Siempre que sea necesario expresamos primeramente todos los términos imaginarios en la forma $bi$. Así tenemos,

$$\begin{aligned} 3 + 2\sqrt{-2} - 2(\sqrt{-3} - 1) + 2i - 4 &= 3 + 2\sqrt{2}i - 2(\sqrt{3}i - 1) + 2i - 4 \\ &= 3 + 2\sqrt{2}i - 2\sqrt{3}i + 2 + 2i - 4 \\ &= (3+2-4) + (2\sqrt{2} - 2\sqrt{3} + 2)i \\ &= 1 + (2\sqrt{2} - 2\sqrt{3} + 2)i. \end{aligned}$$

(b) Aquí los dos primeros factores forman un producto notable y podemos escribir

$$\begin{aligned} (2+3i)(2-3i)(1+2i) &= (4-9i^2)(1+2i) = (4-9(-1))(1+2i) \\ &= 13(1+2i) = 13+26i. \end{aligned}$$

**Ejemplo 3.** Expresar $\dfrac{1+i}{1-i} - \frac{2-i}{2+3i}$ en la forma canónica de los números complejos.

*Solución.* Aquí operamos separadamente con cada una de las fracciones. Aplicando el mismo método que ha conducido a la definición del cociente de dos números complejos, aquí multiplicamos el numerador y el denominador por el conjugado del denominador. Es decir,

$$\begin{aligned}
\frac{1+}{1-i} &= \frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1-i)} = \frac{1+2i+i^2}{1-i^2} = \frac{2i}{2} = i. \\
\frac{2-i}{2+2i} &= \frac{(2-i)(2-2i)}{(2+2i)(2-2i)} = \frac{4-4i-2i+2i^2}{4-4i} = \frac{2-6i}{8} = \frac{1-3i}{4} \\
&= \frac{1}{4} - \frac{3}{4}i.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\dfrac{1+i}{1-i} - \dfrac{2-i}{2+2i} = i - \left(\dfrac{1}{4} - \dfrac{3}{4}i\right) = -\dfrac{1}{4} + \dfrac{7}{4}i.$

**Ejercicios.**

1. Efectuar las operaciones indicadas y expresar el resultado en la forma conónica.
   (a) $(1+i)+(3-2i)$
   (b) $(2+\sqrt{-4})-(3-\sqrt{-9})$
   (c) $\dfrac{1}{1-2i}$
   (d) $\dfrac{3}{2-i}$
   (e) $\dfrac{3-i}{1+i}$
   (f) $\dfrac{2-i}{1+2i}$
2. Demostrar que $1+\sqrt{3}i$ y $1-\sqrt{3}i$ son raíces de la ecuación $2x^4-7x^3+12x^2-8x-8=0$.
3. Por factorización obtener las cuatro raíces de la ecuación $x^4-16=0$.